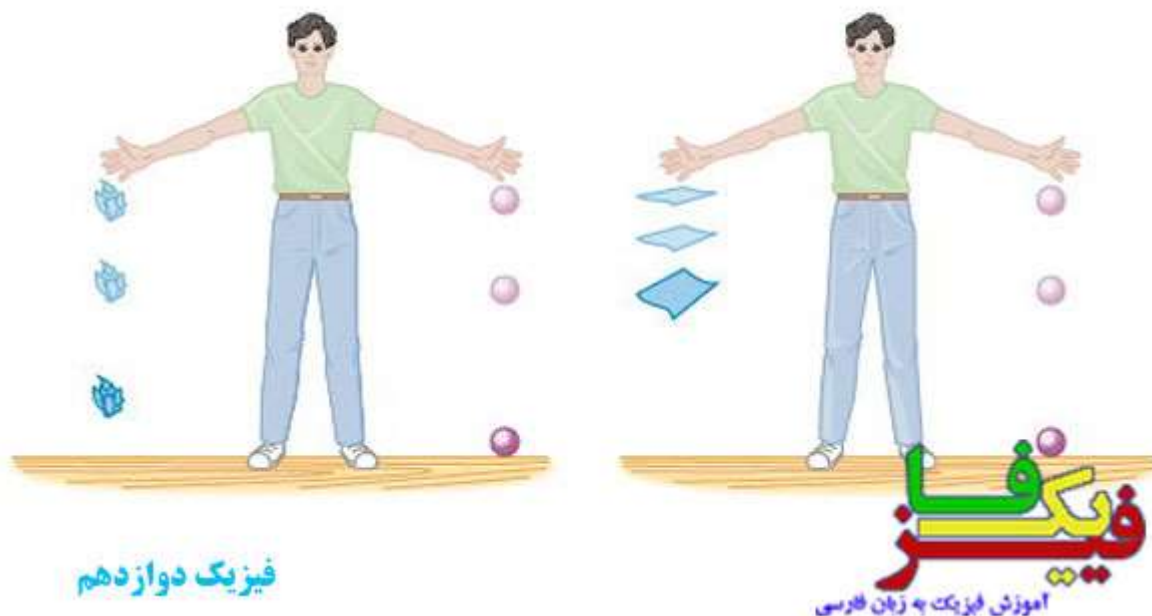


سقوط آزاد: وقتی گلوله ای را رها می کنیم اثر مقاومت هوا هنگام حرکت آن ناچیز است، ولی وقتی برگه کاغذی را رها می کنیم اثر مقاومت هوا را هنگام حرکت آن نمی توان نادیده گرفت. اما اگر برگه کاغذی را مچاله کنیم، کاهش چشمگیر اثر مقاومت هوا را مشاهده می کنیم.

سقوط آزاد بدون سرعت اولیه

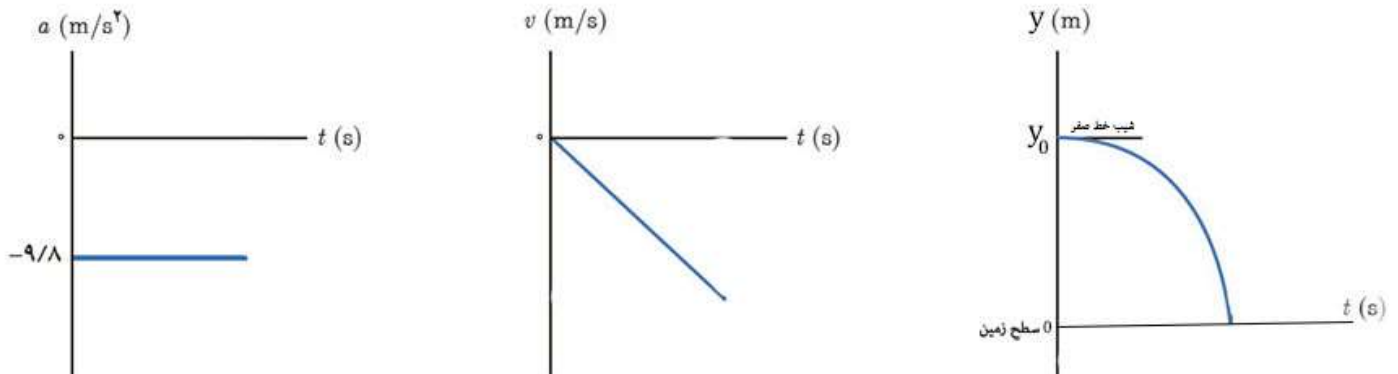


در صورتی که از اثر مقاومت هوا برای جسمی که در نزدیکی سطح زمین سقوط می کند، بتوان چشم پوشی کرد، شاهد یک حرکت با شتاب ثابت به نام سقوط آزاد خواهیم بود. حرکت سقوط آزاد، افزون بر رها کردن جسم، شامل پرتاب کردن جسم رو به پایین و یا رو به بالا نیز می شود. در هر سه حالت، جهت شتاب رو به پایین (به سمت مرکز زمین) و اندازه آن ثابت است و تقریباً برابر $g=9.8\text{m/s}^2$ است. ما در این آموزش فقط حرکت سقوط آزاد اجسام بدون سرعت اولیه که مد نظر کتاب فیزیک دوازدهم رشته ریاضی و فیزیک است، را بررسی می کنیم.

سقوط آزاد بدون سرعت اولیه: همانطوری که در بالا توضیح داده شد این حرکت، حرکتی با شتاب ثابت g رو به پایین یعنی $(-g)$ و با سرعت اولیه صفر است که در آن از مقاومت هوا چشم پوشی شده است. اگر جسم از ارتفاع y_0 رها شود معادلات حرکت به صورت جدول زیر خواهد بود:

معادله	توضیح معادله
$v = -gt$	معادله سرعت- زمان
$y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0$	معادله مکان- زمان
$v^2 = -2g(y - y_0)$	معادله سرعت- مکان (v سرعت متحرک در مکان y است)
$\Delta y_{t,n} = -\frac{1}{2}g(2n-1)t^2$	جا به جایی در t ثانیه n ام
$\Delta y_n = -\frac{1}{2}gn(2t-n)$	جا به جایی در n ثانیه آخر حرکت (t زمان کل حرکت است)

نمودارهای سقوط آزاد بدون سرعت اولیه: نمودار مکان-زمان و سرعت-زمان و شتاب-زمان متحرکی که از ارتفاع y_0 بدون سرعت اولیه رها شده است، به شکل زیر است:



مثال 1: شخصی سنگی را از بالای دیوار بلندی رها می کند.

الف) پس از یک ثانیه گلوله چه مسافتی را طی می کند و سرعت آن به چه مقدار می رسد؟

ب) اگر ارتفاع دیوار 10 متر باشد، سرعت برخورد گلوله به سطح زمین و مدت زمان کل حرکت را پیدا کنید.

حل مثال 1: الف)

$$\text{مسافت} = |\Delta y| = \left| -\frac{1}{2}gt^2 \right| = \frac{1}{2} \times 9.8 \times (1)^2 = 4.9 \text{ m}$$

$$v = -gt = -9.8 \times 1 = -9.8 \text{ m/s}$$

ب)

$$v^2 = -2g(y - y_0) = -2 \times 9.8(0 - 10) = 196$$

$$v = -14 \text{ m/s}$$

سرعت منفی مورد قبول است چون جهت حرکت به سمت پایین است.

$$v = -gt \rightarrow t = \frac{v}{-g} = \frac{-14}{-9.8} \approx 1.4 \text{ s}$$

مثال 2: دو گلوله در شرایط خلاء به فاصله زمانی 2.5 ثانیه از یک نقطه بالای زمین رها می شوند. چند ثانیه پس از رها شدن گلوله اول، فاصله دو

گلوله به 68.75 متر می رسد؟ ($g=10\text{m/s}^2$)

حل مثال 2: ابتدا معادله مکان-زمان دو گلوله را می نویسیم و دقت می کنیم که زمان های دو معادله با یکدیگر متفاوت است. معادلات به صورت

زیر می شوند:

$$y_1 = -\frac{1}{2}g t_1^2 + y_0$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}g t_2^2 + y_0$$

$$t_1 = t_2 + 2.5$$

با توجه به اینکه گلوله دوم بالاتر از گلوله اول قرار دارد، فاصله بین دو گلوله از رابطه زیر بدست می آید:

$$y_2 - y_1 = -\frac{1}{2}g(t_2^2 - t_1^2) = -\frac{1}{2}g((t_1 - 2.5)^2 - t_1^2)$$

$$68.75 = -\frac{1}{2} \times 10(6.25 - 5t_1)$$

$$5t_1 - 6.25 = 13.75 \rightarrow t_1 = 4s$$

همانطوری که در مثال 2 دیدید، وقتی دو گلوله با فاصله زمانی مشخصی از یک نقطه رها شده و سقوط آزاد انجام می دهند، پس از گذشت زمان در حین سقوط، فاصله دو گلوله از هم بیشتر می شود و همچنین همواره سرعت گلوله اولی بیشتر از سرعت گلوله دومی است.

در صورتی که در مساله ای شتاب گرانشی $g=10m/s^2$ باشد، و جسم سقوط آزاد بدون سرعت اولیه انجام دهد در ثانیه های متوالی سرعت و جابه جایی به صورت زیر خواهد بود که حل بسیاری از مسائل را ساده خواهد کرد:

اندازه جابه جایی در ثانیه n ام	اندازه سرعت در لحظه t	ثانیه های متوالی
5	10	ثانیه اول حرکت
15	20	ثانیه دوم حرکت
25	30	ثانیه سوم حرکت
35	40	ثانیه چهارم حرکت
...

مثال 3: گلوله ای در شرایط خلا بدون سرعت اولیه از ارتفاع h رها می شود و در آخرین ثانیه سقوط 35 متر جابه جا می شود. ارتفاع h چند متر است؟ ($g=10m/s^2$)

حل مثال 3: با استفاده از جدول بالا براحتی می توان فهمید ثانیه آخر حرکت، ثانیه چهارم حرکت است. یعنی کل حرکت 4 ثانیه طول کشیده است و ارتفاع h با جمع جایی های طی شده به صورت زیر بدست می آید:

$$h=5+15+25+35=80m$$

روش دوم حل مثال 3: (روش طولانی تر) از رابطه جابه جایی در n ثانیه آخر حرکت استفاده می کنیم:

$$\Delta y_n = -\frac{1}{2}gn(2t-n) \rightarrow \Delta y_1 = -\frac{1}{2}g(2t-1)$$

$$-35 = -\frac{1}{2} \times 10(2t-1) \rightarrow t = 4s$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0 \rightarrow 0 = -5 \times 16 + h \rightarrow h = 80m$$

مثال 4: گلوله ای از ارتفاع h رها می شود. مسافت پیموده شده در ثانیه چهارم چند برابر مسافت پیموده شده در ثانیه دوم است؟

حل مثال 4: روش اول: با استفاده از رابطه جابه جایی در t ثانیه n ام

$$\frac{|\Delta y_{1,4}|}{|\Delta y_{1,2}|} = \frac{\left| -\frac{1}{2}g(2 \times 4 - 1)(1)^2 \right|}{\left| -\frac{1}{2}g(2 \times 2 - 1)(1)^2 \right|} = \frac{7}{3}$$

روش دوم: با استفاده از جدول جابه جایی ها

$$\frac{|\Delta y_{1,4}|}{|\Delta y_{1,2}|} = \frac{35}{15} = \frac{7}{3}$$

به تمرین های زیر پاسخ دهید:

تمرین 1: جسمی در شرایط خلأ رها می شود، سرعت برخورد به زمین 30m/s می باشد، ارتفاع رها شدن چند متر است؟ ($g=10m/s^2$)

حل ترین 1:

روش اول:

$$v = -gt \rightarrow -30 = -10t \rightarrow \boxed{t = 3s}$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0 \rightarrow 0 = -5(3)^2 + h \rightarrow \boxed{h = 45m}$$

روش دوم: با توجه به سرعت $30m/s$ می توان نصفه بین از 3 ثانیه جسم به زمین رسیده است که برعکس می توان h را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$h = 5 + 15 + 25 = \boxed{45m}$$

تمرین 2: گلوله ای از ارتفاع 45 متری سطح زمین رها می شود. سرعت متوسط در ثانیه سوم حرکت چند متر بر ثانیه است؟ ($g=10m/s^2$)

حل ترین 2: روش اول:

$$\Delta y_{t,n} = -\frac{1}{2}g(n-1)t^2$$

ثانیه سوم $\rightarrow \begin{cases} t=1 \\ n=3 \end{cases} \Delta y_{1,3} = -5(4-1)(1)^2 = -15m$

$$v_{av} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{-15}{1} = -15 m/s$$

روش دوم: می دانیم در ثانیه سوم جسم 15 متر به پایین جا بجای می آید:

$$\bar{v} = \frac{-15}{1} = -15 m/s$$

تمرین 3: گلوله از ارتفاع h رها می شود. 80 متر آخر را در مدت 2 ثانیه طی می کند. h چند متر است؟ ($g=10m/s^2$)

حل ترین 3:

روش اول:

$$\Delta y_n = -\frac{1}{2}gt_n(2t-n) \rightarrow \Delta y_p = -5 \times 2(2t-2) = -10$$

زمان کل حرکت $t = 5s$ $\rightarrow t-1 = 4$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0 \rightarrow 0 = -5(5)^2 + h \rightarrow \boxed{h = 125m}$$

روش دوم: 2 ثانیه 10 متر یعنی 5 متر در ثانیه حرکت

5, 15, 25, 35, 45, ... $h = 5 + 15 + 25 + 35 + 45 = 125m$

تمرین 4: گلوله ای از ارتفاع h رها می شود، سرعت آن در ارتفاع 12 متری، $20m/s$ می شود. ارتفاع h چند متر است؟ ($g=10m/s^2$)

حل ترین 4:

$$v^2 = -2g(y-y_0) \rightarrow (-20)^2 = -20(12-h)$$

$$12-h = -20 \rightarrow \boxed{h = 32m}$$

تمرین 5: گلوله ای از ارتفاع h رها می شود. پس از t ثانیه به زمین می رسد، اگر این گلوله $\frac{3}{4}$ اول مسیر را در مدت t' ثانیه طی کند، نسبت t/t' چقدر است؟

حل ترین 5:



$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0 \rightarrow y_0 - y = \frac{1}{2}gt^2$$

ارتفاع سقوط $h = \frac{1}{2}gt^2$

$$\frac{\frac{3}{4}h}{h} = \frac{\frac{1}{2}gt'^2}{\frac{1}{2}gt^2} \rightarrow \frac{3}{4} = \left(\frac{t'}{t}\right)^2 \rightarrow \frac{t'}{t} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{t}{t'} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

تمرین 6: جسمی از ارتفاع h در شرایط خلأ سقوط می‌کند، پس از 6 ثانیه به سطح زمین می‌رسد. این جسم $h/9$ ابتدای مسیر را در چه زمانی طی می‌کند؟

حل تمرین 6: مانند تمرین 5 عمل میکنیم:

$$\frac{h}{9} = \left(\frac{t'}{t}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{9} = \frac{t'}{6} \rightarrow \boxed{t' = 2s}$$

تمرین 7: شخصی از ارتفاع 17 متری زمین روی بالشی به ضخامت 2m سقوط می‌کند و مقاومت هوا ناچیز است. اگر در برخورد ضخامت بالش به 0/5 متر برسد، اندازه شتاب شخص بعد از رسیدن به بالش تا انتهای مسیر رو به پایین چند g است؟ (شتاب حرکت شخص در جمع شدن بالش را ثابت فرض کنید)

حل تمرین 7:

$$v^2 = -2g(y - y_0) \rightarrow \text{سرعت برخورد به بالش}$$

$$v^2 = -2g(2 - 17) \rightarrow v^2 = 30g$$

حرکت به از ارتفاع 2 متری تا 15 متری سطح زمین یک حرکت با شتاب ثابت a فرض شده است:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(y - y_0) \rightarrow 0 = 30g + 2a(-15)$$

$$3a = 30g \rightarrow \boxed{a = 10g}$$

تمرین 8: گلوله‌ای در شرایط خلأ از ارتفاع h رها می‌شود و در لحظه‌ای که به 50 متری سطح زمین می‌رسد، سرعتش $15m/s$ می‌شود. این گلوله چند ثانیه پس از رها شدن به زمین می‌رسد؟ ($g=10m/s^2$)

حل تمرین 8:

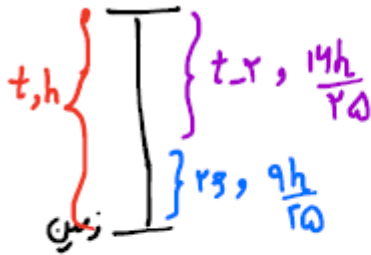
$$v^2 = -2g(y - y_0) \rightarrow 15^2 = -20(50 - h)$$

$$225 = -20(50 - h)$$

$$h - 50 = 11,25 \rightarrow h = 41,25 m$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow 41,25 = 5t^2 \rightarrow t^2 = 8,25 \rightarrow \boxed{t = 2,87 s}$$

تمرین 9: در شرایط خلا گلوله ای را از ارتفاع h از سطح زمین از حال سکون رها می کنیم. اگر این گلوله در 2 ثانیه آخر حرکت، مسافت $9h/25$ را طی کند، ارتفاع h چند متر است؟ ($g=10m/s^2$)



حل تمرین 9: همانند تمرین 5 ضرایب را است:

$$\frac{14h}{25} = \frac{(t-2)^2}{t^2} \rightarrow \frac{t-2}{t} = \frac{2}{5}$$

$$5t = 5t - 10 \rightarrow \boxed{t = 10s}$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2 = 5 \times 10^2 = \boxed{500m}$$

تمرین 10: جسم کوچکی از ارتفاع h رها می شود. جسم در ثانیه آخر سقوط به اندازه 53.9 متر پایین می آید. اگر ($g=9.8m/s^2$) باشد، ارتفاع h چند متر است؟

حل تمرین 10:

$$\text{جابجایی در ثانیه آخر سقوط} \xrightarrow{n=1} \Delta y_1 = -\frac{1}{2}g(2t-1)$$

$$-53.9 = -\frac{9.8}{2}(2t-1)$$

$$2t-1 = 11 \rightarrow \boxed{t = 6s}$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times 36 = \boxed{176.4m}$$

تمرین 11: از بالای برجی سه سنگ بدون سرعت اولیه و با فاصله های زمانی 1 ثانیه از یکدیگر رها می شوند. اگر در لحظه ای که اولی به زمین می رسد، دومی در ارتفاع 20 متری از زمین باشد، در همان لحظه سومی چند متر تا زمین فاصله دارد؟ ($g=10m/s^2$)

حل تریب 11 :

$$y_2 - y_1 = -\frac{1}{2}g(t_2' - t_1')^2$$

$$20 = -\frac{1}{2}g((t_1 - 1)^2 - t_1'^2) = -5(1 - 2t_1) \rightarrow 2t_1 - 1 = 4 \rightarrow t_1 = 2.5s$$

$$y_3 - y_1 = -\frac{1}{2}g(t_3'' - t_1')^2 = -\frac{1}{2}g((t_1 - 2)^2 - t_1'^2)$$

$$y_3 - y_1 = -\frac{1}{2}g(4 - 4t_1) = -2g(1 - t_1) = -20(1 - 2.5) = 30m$$

ردش دوم : همواره جای جای در ثانیه n ام ، 10 متر بیشتر از جای جای در ثانیه $(n-1)$ ام است . یعنی اگر جای جای در ثانیه n ام حرکت (دقت کنید که اول از زمین 10 متر باشد) 20 متر باشد جای جای در ثانیه قبل از ثانیه n ام 10 متر است یعنی 10 متر است . پس فاصله بین گلوله سوم تا اول (زمین) 30 متر است .

